

# Morphologie Mathématique sur graphes pondérés de topologie arbitraire

Vinh-Thong Ta, Abderrahim Elmoataz et Olivier Lézoray

Université de Caen Basse-Normandie, ENSICAEN, GREYC, Équipe Image, 6 Bd. Maréchal Juin, 14050 CAEN cedex FRANCE  
 {vinhthong.ta,olivier.lezoray,abderrahim.elmoataz-billah}@unicaen.fr

## I. INTRODUCTION

Les deux opérateurs fondamentaux de la Morphologie Mathématique (MM) sont la *dilatation* et l'*érosion*. Ils sont usuellement formulés comme des opérations sur des ensembles ou des treillis et leurs implantations sont habituellement faites dans un cadre algébrique (discret). Cependant, des formulations alternatives basées sur des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) ont également été proposées. Ces formulations montrent qu'une dilatation  $\delta$  et qu'une érosion  $\varepsilon$  d'une fonction  $f^0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par un élément structurant  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$  peuvent être générées par les EDP suivantes

$$\delta(f) = \partial_t f = +\|\nabla f\|_p \text{ et } \varepsilon(f) = \partial_t f = -\|\nabla f\|_p . \quad (1)$$

$\nabla$  est l'opérateur gradient,  $\|\cdot\|_p$  correspond à la norme  $\mathcal{L}_p$ ,  $f$  est la version transformée de  $f^0$  et avec la condition initiale que  $f = f^0$  au temps  $t=0$ . Ces formulations ont les avantages de permettre une meilleure approximation géométrique et une précision sous-pixellaire. Néanmoins, elles ne considèrent que des dérivées locales et la discrétisation numérique est complexe pour des données définies sur des domaines irréguliers. De plus, la MM est bien définie pour le traitement des images mais il n'existe pas d'extension générale pour le traitement de données non-organisées de grande dimension.

**Contributions.** Nous étendons les formulations basées sur les EDP pour obtenir des schémas discrets non locaux en définissant des équations aux différences partielles sur graphes pondérés. La formulation proposée a les avantages suivants. Les traitements morphologiques locaux et non locaux des images sont directement intégrés dans une même formulation. Notre méthodologie étant définie sur des graphes, n'importe quelles données discrètes pouvant être représentées par un graphe peuvent être traitées dans notre cadre (notamment les données multi-variées définies sur des domaines irréguliers).

## II. GRAPHES ET OPÉRATEURS SUR GRAPHE

Notre formulation repose des définitions et propriétés mathématiques décrites ce dans paragraphe.

Soit  $G=(V, E, w)$ , un *graphe pondéré* défini par un ensemble  $V$  de *sommets*, un sous-ensemble  $E \subset V \times V$  d'*arêtes* et d'une *fonction de poids*  $w: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Nous définissons également une fonction  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur les sommets de  $G$ .

**Une famille de gradients morphologiques.** Basés sur nos travaux ultérieurs, nous définissons respectivement les gradients morphologiques *externe* et *interne* en un sommet  $u$  :

$$\begin{aligned} (\nabla^+ f)(u) &= (\max(0, w_{uv}^{1/2} f(v) - f(u)))_{uv \in E} \text{ et} \\ (\nabla^- f)(u) &= (-\min(0, w_{uv}^{1/2} f(v) - f(u)))_{uv \in E} . \end{aligned}$$

Ainsi, les normes  $\mathcal{L}_p$  associées au gradient externe, avec

$0 < p < +\infty$  et  $p = \infty$ , sont respectivement

$$\begin{aligned} \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p &= \left( \sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} \max(0, f(v) - f(u))^p \right)^{1/p} \text{ et} \\ \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty &= \max_{v \sim u} (w_{uv}^{1/2} \max(0, f(v) - f(u))) . \end{aligned} \quad (2)$$

Les mêmes définitions sont valables pour le gradient interne. *Remarques* : dans le cas où  $p = \infty$  et  $w = 1$ , à partir des équations (2), nous obtenons les formulations algébriques des gradients externe et interne :  $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty = \delta(f)(u) - f(u)$  et  $\|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty = f(u) - \varepsilon(f)(u)$ . Le gradient et le Laplacien morphologiques algébriques peuvent également s'obtenir par  $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty + \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty$  et  $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty - \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty$ .

## III. DILATATION ET ÉROSION SUR GRAPHE

L'objectif est de trouver les analogues discrets sur graphes des équations (1). Pour cela nous définissons les *bords externe*  $\partial^+ \mathcal{A}$  et *interne*  $\partial^- \mathcal{A}$  d'un ensemble  $\mathcal{A} \subset V$ , respectivement par  $\{u \in \mathcal{A}^c : \exists v \in \mathcal{A}, uv \in E\}$  et  $\{u \in \mathcal{A} : \exists v \in \mathcal{A}^c, uv \in E\}$ . À partir de ces définitions, nous pouvons démontrer l'existence de liens entre les gradients externe et interne et les bords correspondants. Cela nous permet de déduire qu'une dilatation correspond à *maximiser* un gain de surface proportionnellement à  $+\|\nabla_w^+ f\|_p$  et qu'une érosion correspond à *minimiser* ce gain par rapport à  $-\|\nabla_w^- f\|_p$ . De là, les versions discrètes sur graphe des équations (1) sont alors

$$\delta(f) = \partial_t f = +\|\nabla_w^+ f\|_p \text{ et } \varepsilon(f) = \partial_t f = -\|\nabla_w^- f\|_p . \quad (3)$$

La résolution de l'équation d'évolution (3) pour le cas de la dilatation peut donner lieu à l'algorithme semi-discret suivant,  $\forall u \in V$

$$f^{n+1}(u) = f^n(u) + \Delta t \|\nabla_w^+ f^n(u)\|_p \quad (4)$$

avec  $f^{(0)}(u) = f^0(u)$  comme condition initiale.

*Remarques* : dans le cas où  $p=2$ ,  $w=1$  avec un graphe grille en 4-voisinage, l'algorithme (4) correspond au schéma exact de discrétisation d'*Osher-Sethian* utilisé par les méthodes basées sur les EDP dans le cadre des images en niveaux de gris. Dans le cas où  $p = \infty$ ,  $w = 1$  et  $\Delta t = 1$  alors l'algorithme (4) correspond à la *formulation algébrique* d'une dilatation sur graphe.

## IV. EXPÉRIMENTATIONS

Le but des expérimentations suivantes n'est pas de résoudre un problème particulier de traitement d'images ou de données multi-variées mais de montrer le potentiel de la méthodologie, notamment pour le traitement morphologique non local des images texturées ou celui des données définies sur des domaines irréguliers

**Traitements morphologiques d'images et changement de topologie.** La figure 1 montre que l'utilisation d'un

poinds dans les traitements morphologiques permet de capturer plus d'informations, notamment celles de contours. Cette expérimentation montre également la possibilité d'utiliser, grâce à notre formulation, une autre structure de graphe. Un graphe d'adjacence des régions (RAG) peut être construit à partir d'une partition de l'image originale (figure 1(b)). Ce graphe permet de réduire les temps de calcul (du fait de la réduction du nombre de sommets à considérer, 82% dans ce cas) des traitements morphologiques, tout en conservant les mêmes propriétés comme le montrent les résultats des figures 1(f) à 1(h) à comparer à ceux des figures 1(e).

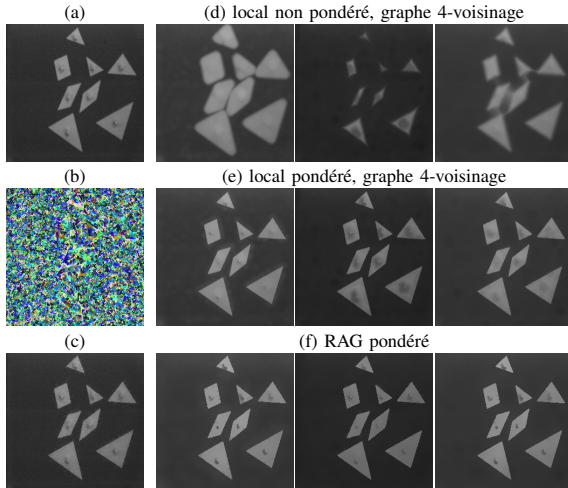


Fig. 1. (a) : image originale (65 536 pixels), (b) : partition à partir de (a) (11 853 régions, 82% de réduction) et (c) : image moyenne couleur à partir de (a) et (b). Lignes (d) cas non pondéré et (e) cas pondéré. (d) et (e) graphe grille en 4-voisinage. Ligne (f) RAG pondéré. Deuxième, troisième et quatrième colonne : dilatation, érosion et fermeture.

**Traitements morphologiques non locaux avec patches pour des images texturées.** La figure 2 montre le bénéfice des traitements non locaux avec patches dans le traitement morphologique des images comportant des structures fines et répétitives (figures 2(d) et 2(h)). Comme le montrent les figures 2(b) et 2(g), les méthodes usuelles capturent de manière difficile ce type d'information dans les images.

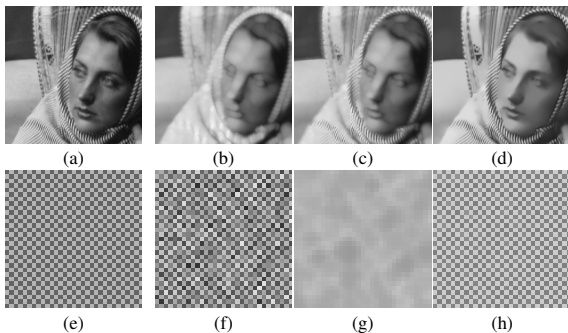


Fig. 2. (a) et (e) : images originales, (f) image bruitée à partir de (e), (b) et (g) cas locaux non pondérés, (c) cas local pondéré, (d) et (h) cas non locaux avec patches. Première ligne : dilatation, seconde ligne : fermeture.

**Traitements morphologiques de données non-organisées multi-variées.** La figure 3 illustre une des nouveautés de notre méthodologie, le traitement morphologique de données discrètes non-organisées et multi-variées. La première ligne de la figure 3, montre l'effet et l'évolution d'un filtrage alterné séquentiel sur des données bruitées. La seconde ligne présente des traitements morphologiques (dilatation, érosion et ouverture) d'une base d'imagettes (base USPS). Chaque imagette est de taille  $16 \times 16$  pixels. Il est à noter que dans ce cas, chaque sommet du graphe représente une imagette et est décrit par un vecteur appartenant à  $\mathbb{R}^{16 \times 16}$ . Nous pouvons observer les effets de la dilatation et de l'érosion, mais plus particulièrement

ceux de l'opération d'ouverture qui filtre les données et crée de nouveaux modèles pour chaque chiffre (ici les chiffres 1 et 3).

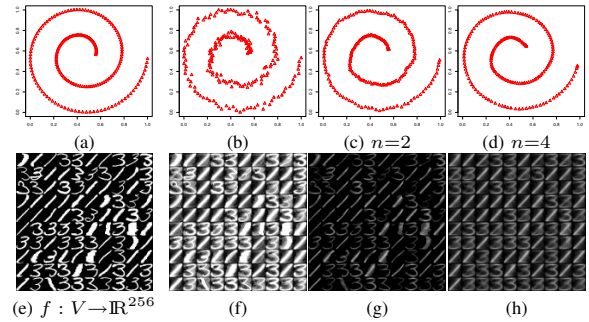


Fig. 3. (a) et (e) : données originales. (b) : donnée bruitée à partir de (a). (c) et (d) résultats du filtrage alterné séquentiel avec le nombre de passe. (f), (g) et (h) : dilatation, érosion et ouverture.

**Segmentation interactive d'images.** La figure 4 montre des résultats de segmentation interactive (guidée par l'utilisateur). La segmentation est réalisée par résolution de l'Équation Eikonale à l'aide des formulations et algorithmes morphologiques proposés. La première ligne de la figure montre clairement le bénéfice des méthodes non locales avec patches pour la segmentation de texture par rapport aux méthodes usuelles. La seconde ligne de la figure 4, à l'instar de la figure 1, montre le bénéfice de l'utilisation d'une autre structure de graphe. Ici, le graphe utilisé est calculé à partir d'une partition. Nous pouvons noter que la partition 4(f) (741 régions) permet de construire un graphe fortement réduit en terme de sommets (98.5% de réduction) par rapport à celui qui aurait été construit à partir des pixels de l'image (49 000 pixels). Cela permet finalement d'accélérer le processus de segmentation. De plus, dans cette expérimentation, nous avons utilisé un RAG auquel nous avons ajouté des sommets non adjacents. Ainsi, les résultats 4(g) et 4(h) montrent la capacité de segmenter des objets non spatialement connexes avec un minimum de marqueurs initiaux et la robustesse de la méthode vis-à-vis du positionnement de ces marqueurs.

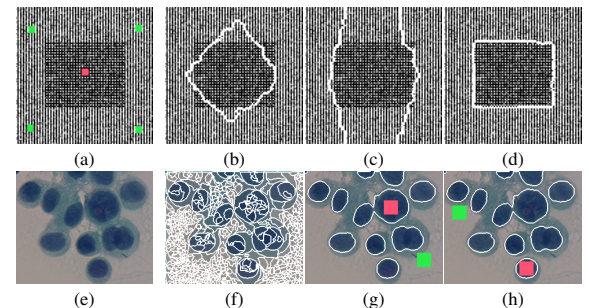


Fig. 4. (a) : image originale + marqueurs initiaux. (b), (c) et (d) segmentations finales. (b) cas local non pondéré, (c) cas local pondéré, (d) cas non local avec patches. (e) : image originale. (f) : partition calculée à partir de (e) (98.5% de réduction par rapport à (e)), (g) et (h) segmentations finales + marqueurs initiaux.

## V. PUBLICATIONS ASSOCIÉES

- V.-T. Ta, A. Elmoataz, et O. Lézoray, "Adaptation of Eikonal Equation over Weighted Graphs", 2009, accepté à *SSVM 2009*
- V.-T. Ta, A. Elmoataz, et O. Lézoray, "Nonlocal Morphological Levelings by Partial Difference Equations over Weighted Graphs" dans *Proc. of 19th ICPR 2008*
- V.-T. Ta, A. Elmoataz, et O. Lézoray, "Partial Difference Equations over Graphs: Morphological Processing of Arbitrary Discrete Data" dans *Proc. of 10th ECCV 2008*, 2008, pp 668–680
- V.-T. Ta, A. Elmoataz, et O. Lézoray, "Partial difference equations on graphs for Mathematical Morphology operators over images and manifolds" dans *Proc. of 15th ICIP 2008*, 2008, pp 801–804, *prix IBM du meilleur article étudiant*
- A. Elmoataz, O. Lézoray, S. Bougleux, et V.-T. Ta, "Unifying local and nonlocal processing with partial difference operators on weighted graphs," in *Proc. of LNLA 2008*, 2008, pp 11–26, *article invité*.